Nieoficjalne treści zadań na Ćwiczenia z Fizyki 0+A dla I roku Chemii UW. Nie zawsze wszystkie zadania są robione na ćwiczeniach i nie zawsze są od razu do nich podane rozwiązania / szkice rozwiązań. Zadania mogą być czasami modyfikowane podczas zajęć.

Uwagi dotyczące notacji

Dowolny wektor $\mathbf{v}$, który w danym układzie współrzędnych $U = (\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n)$ będzie mógł być zapisany jako:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}_i$$

gdzie $\mathbf{e}_i$ to i-ty wersor (wektor jednostkowy) wzdłuż zadanej osi. Często będziemy stosować notację gdzie współrzędne wektora będziemy zapisywać jako macierz kolumnową w postaci:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$$

Jeśli to nie będzie oczywiste to będziemy dodawać o jaki układ współrzędnych chodzi w postaci $[\cdot]_U$. Ponadto, długość dowolnego wektora $\mathbf{v}$ będziemy oznaczać $\|\mathbf{v}\|$ lub po prostu v.

Zadanie 1

Dane są dwa wektory: $\mathbf{a} = [2 \ \ -1]^T$ (zaczepiony w punkcie $A(0,1)$) i $\mathbf{b} = [3 \ 4]^T$ (zaczepiony w punkcie $B(1,-1)$). (a) Dodać do siebie te wektory graficznie i analitycznie ($\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$). (b) Odjąć do siebie te wektory graficznie i analitycznie ($\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$). (c) Obliczyć długości wektorów $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$. (d) Obliczyć i narysować wektor $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. (e) Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ i kąt między nimi.

Rozwiązanie:
(a) $\mathbf{c} = [5 \ 3]^T$. (b) $\mathbf{d} = [-1 \ \ -5]^T$. (c) $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{34}$, $\|\mathbf{d}\| = \sqrt{26}$. (d) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = [13 \ 10]^T$. (e) Mamy, że $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$ i $\|\mathbf{b}\| = 5$; ze współrzędnych wektorów otrzymujemy, że $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$; ostatecznie $\cos\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/(\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|) = 2\sqrt{5}/25$.

Zadanie 2

Znajdź taki wektor $\mathbf{b}$ prostopadły do wektora $\mathbf{a} = [3 \ \ -5]^T$, który leży w płaszczyźnie XY i ma długość $b = 5$.

Rozwiązanie:
Zakładamy, że $\mathbf{b} = [b_x \ b_y]^T$. Wiemy, że $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 = 3b_x - 5b_y$ i $b = 5 = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$. Rozwiązując układ równań otrzymujemy dwa rozwiązania: $\mathbf{b}_1 = (1/\sqrt{34}) \cdot [25 \ 15]^T$ lub $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{b}_1$.

Zadanie 3

Znaleźć takie dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, które spełniają następujące relacje: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [2 \ \ -1]^T$, $b = 1$.

Rozwiązanie:
Zakładamy, że $\mathbf{a} = [a_x \ a_y]^T$ i $\mathbf{b} = [b_x \ b_y]^T$. Wiemy, że $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 = a_x b_x + a_y b_y$, $a_x + b_x = 2$, $a_y + b_y = -1$ i $b = 1 = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$. Rozwiązując układ równań otrzymujemy dwa równoważne rozwiązania:

1. $\mathbf{a} = (1/5) \cdot [7 \ \ -1]^T$ i $\mathbf{b} = (1/5) \cdot [3 \ \ -4]^T$
2. $\mathbf{a} = [1 \ \ -1]^T$ i $\mathbf{b} = [1 \ 0]^T$

Zadanie 4

Dane są dwa wektory $\mathbf{a} = [3\ 5\ \ -6]^T$ i $\mathbf{b} = [4\ 2\ 1]^T$. Obliczyć ich iloczyn wektorowy ($\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$) i udowodnić, że wynikowy wektor jest prostopadły do tych wektorów.

Rozwiązanie:
Wystarczy podstawić do wzoru i mamy $\mathbf{c} = [17\ \ -27\ \ -14]^T$. Aby sprawdzić obliczamy iloczyny skalarne $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ i $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$.

Zadanie 5

Ruch zdefiniowany jest poprzez następujący wektor wodzący $\mathbf{r}(t)$ (dane na końcu zadania). (a). Napisz równania ruchu w postaci parametrycznej (tj. zapisz równania na $x(t)$ i $y(t)$). (b) Narysuj wykresy $x(t)$ i $y(t)$. Znajdź zakres zmienności x i y. (c). Wyznacz tor ruchu (analitycznie i graficznie). (c). Zaznacz na torze $\mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}(t_2)$ i kierunek ruchu. (d). Wyznacz prędkość zakresie od t_1 do t_2). (e). Wyznacz prędkość (chwilową) i przyśpieszenie (chwilowe) dla czasów t_1 i t_2. (f). Udowodnij, że wektor prędkości jest zawsze styczny do toru ruchu.

1. $\mathbf{r}(t) = (2t-2)\mathbf{e}_x + (4t^2 - 6t - 4)\mathbf{e}_y, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2$
2. $\mathbf{r}(t) = 2\sin(2t)\mathbf{e}_x + 2\cos(2t)\mathbf{e}_y, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi/4$
3. $\mathbf{r}(t) = 2\sin(2t)\mathbf{e}_x + 2\cos(4t)\mathbf{e}_y, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi/4$

Zadanie 6

Aluminiowa kostka o przekroju poprzecznym A, wysokości h i gęstości ϱ porusza się w pionowej rurze z wodą o gęstości ϱ_w w kierunku zgodnym z siłą grawitacji. Na poruszającą się kostkę w wodzie działa siła oporu ośrodka, która jest proporcjonalna do przekroju poprzecznego kostki i proporcjonalna do prędkości kostki w ośrodku v ze współczynnikiem proporcjonalności równym η. (a) Znaleźć prędkość graniczną opadania kostki. (b) Wyznacz zależność położenia i prędkości kostki od czasu.