Treści zadań ze *szkicami* rozwiązań na Ćwiczenia z Fizyki 0+A dla I roku Chemii UW. Części na czerwono są dodatkowe i nie zawsze są robione na ćwiczeniach i nie zawsze są od razu do nich podane szkice rozwiązań.

Uwagi dotyczące notacji

Dowolny wektor $\mathbf{v}$, który w danym układzie współrzędnych $U = (\mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_n)$ będzie mógł być zapisany jako:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{e}_i$$

gdzie $\mathbf{e}_i$ to i-ty wersor (wektor jednostkowy) wzdłuż zadanej osi. Często będziemy stosować notację gdzie współrzędne wektora będziemy zapisywać jako macierz kolumnową w postaci:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$$

Ponadto, długość dowolnego wektora $\mathbf{v}$ będziemy oznaczać $\|\mathbf{v}\|$ lub po prostu v.

Zadanie 1

W trzech narożach kwadratu o boku a umieszczono kolejno ładunki: $-3q$, $+q$ i $+2q$ (ładunek $+q$ znajduje się po przekątnej od naroża kwadratu, w którym nie ma żadnego ładunku). Oblicz wektor natężenia pola w ostatnim narożu.

Rozwiązanie:

Położenia ładunków w zadanym kartezjańskim układzie współrzędnych mogą wyglądać tak:

$$\mathbf{r}_{+2q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{-3q} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{+q} = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Całkowite pole jest sumą odpowiednich pól cząstkowych:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+2q} + \mathbf{E}_{-3q} + \mathbf{E}_{+q} = k\frac{2q}{r_{+2q}^3} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} + k\frac{-3q}{r_{-3q}^3} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + k\frac{q}{r_{+q}^3} \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \frac{kq}{a^2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} - 3 \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\right) \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

(a) Oblicz natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie w przestrzeni pochodzące od dwóch różnoimiennych ładunków o wartości q znajdujących się w odległości d od siebie. (b) Rozważ szczególne przypadki, tj. gdy punkt znajduje się na przedłużeniu osi łączącej oba ładunki, oraz gdy znajduje się w równej odległości od obu ładunków (na symetralnej odcinka d). (c) Rozważ przypadek, gdy odległość punktu od środka linii łączącej ładunki jest znacznie większa niż d. (d) Tam, gdzie to będzie możliwe, zapisz odpowiednie wyrażenia korzystając z definicji wektora momentu dipolowego.

Rozwiązanie:

(a) Układ współrzędnych umieszczamy w środku pomiędzy dwoma ładunkami (oś X jest skierowana wzdłuż linii łączącej ładunki). Położenia ładunków:

$$\mathbf{d}_\pm = \begin{bmatrix} \mp\frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla danego wektora $\mathbf{r} = [x\ y]^T$ mamy:

$$\mathbf{d}_\pm + \mathbf{r}_\pm = \mathbf{r}$$

z tego mamy, że

$$\mathbf{r}_\pm = \mathbf{r} - \mathbf{d}_\pm = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mp\frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \pm \frac{d}{2} \\ y \end{bmatrix}$$

Całkowite pole od obu ładunków jest zatem równe:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = k\frac{q}{r_+^3}\mathbf{r}_+ + k\frac{-q}{r_-^3}\mathbf{r}_- = kq\left(\frac{1}{r_+^3}\begin{bmatrix} x + \frac{d}{2} \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{r_-^3}\begin{bmatrix} x - \frac{d}{2} \\ y \end{bmatrix}\right)$$

gdzie

$$r_\pm = \sqrt{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$$

(b) Przypadki szczególne ($y = 0$ i $x = 0$):

$$\mathbf{E}\ (y=0) = kq\left(\frac{1}{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}\ (x=0) = kq\frac{d}{\left(\frac{d^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Rozwijamy wyrażenia r_+^{-3} i r_-^{-3} w szereg Taylora względem małego $d/2$ i obcinamy człony rzędu wyższego niż drugi:

$$\frac{1}{r_\pm^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{\left(x\pm\frac{d}{2}\right)^2+y^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} - \frac{3}{2}\left(\pm\frac{d}{2}\right)\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5} + \ldots \approx \frac{1}{r^3} \mp \frac{3}{2}\cdot\frac{xd}{r^5}$$

i wstawiamy to do wzoru na pole w dowolnym punkcie:

$$\mathbf{E}\ (r \gg d) = kq\left(\frac{d}{r^3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\frac{xd}{r^5}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

(d) Wstawiamy do wyrażeń moment dipolowy dla tego konkretnego przypadku, $\boldsymbol{\mu} = -qd\ [1\ 0]^T$, i otrzymujemy kolejno:

$$\mathbf{E}\ (x=0) = -k\frac{\boldsymbol{\mu}}{\left(\frac{d^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}\ (r \gg d) = -k\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + 3k\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{r}}{r^5}\mathbf{r}$$

Zadanie 3 - *kontynuacja Zadania 1*

W trzech narożach kwadratu o boku a umieszczono kolejno ładunki: $-3q$, $+q$ i $+2q$ (ładunek $+q$ znajduje się po przekątnej od naroża kwadratu gdzie nie ma żadnego ładunku, punkt A). (a) Oblicz potencjał elektrostatyczny w ostatnim narożu (w punkcie A). (b) Oblicz pracę potrzebną na skonstruowanie takiego układu ładunków. (c) Oblicz ujemny gradient potencjału w ostatnim narożu kwadratu, A.

Rozwiązanie:

(a) Analogicznie, jak w Zadaniu 1. Potrzebne są tylko długości wektorów i obliczamy potencjał:

$$V = \frac{kq}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

(b) Obliczamy kolejno prace potrzebne do umieszczenia ładunku $+2q$ w polu $+q$, a potem ładunku $-3q$ w polu dwóch pierwszych:

$$W = 2\frac{kq^2}{a} - 3\frac{kq^2}{a}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2} + 1\right) = -\frac{kq^2}{a}\left(\frac{6\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

(c) Definicje są takie same, jak w Zadaniu 1, czyli chcemy obliczyć pole w środku układu współrzędnych. Aby obliczyć pochodne funkcji w danym punkcie, musimy znać jej zachowanie w pobliżu tego punktu. Wprowadzamy wektor $\mathbf{r} = [x\ y]^T$. Wtedy kolejno mamy wektory:

$$\mathbf{r}'_{+2q} = \begin{bmatrix} x \\ y-a \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}'_{-3q} = \begin{bmatrix} x+a \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}'_{+q} = \begin{bmatrix} x+a \\ y-a \end{bmatrix}$$

Obliczamy potencjał w tym punkcie:

$$V(x,y) = kq\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}}\right)$$

i dalej obliczamy pole, jako ujemny gradient:

$$\mathbf{E}(x,y) = -\nabla V(x,y) = -kq\begin{bmatrix} \frac{2x}{(\sqrt{x^2+(y-a)^2})^3} - \frac{3(x+a)}{(\sqrt{(x+a)^2+y^2})^3} + \frac{x+a}{(\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2})^3} \\ \frac{2(y-a)}{(\sqrt{x^2+(y-a)^2})^3} - \frac{3y}{(\sqrt{(x+a)^2+y^2})^3} + \frac{y-a}{(\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2})^3} \end{bmatrix}$$

Jeśli w tym wyrażeniu podstawimy $x = 0$ i $y = 0$, to otrzymujemy wynik identyczny, jak w Zadaniu 1.

Zadanie 4 - *kontynuacja Zadania 2*

(a) Oblicz potencjał elektrostatyczny w dowolnym punkcie w przestrzeni pochodzący od dwóch różnoimiennych ładunków o wartości q znajdujących się w odległości d. Oblicz jego ujemny gradient. (b) Rozważ przypadek, gdy odległość punktu od środka linii łączącej ładunki jest znacznie większa niż d (przybliżenie multipolowe). Przedstaw wynik korzystając z definicji momentu dipolowego. Oblicz natężenie pola pochodzące od takiego potencjału.

Rozwiązanie:

(a) Robimy analogicznie, jak w Zadaniu 2. Potrzebne są tylko długości wektorów i mamy obliczony potencjał:

$$V = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

Aby obliczyć pole, wpierw obliczamy pochodne cząstkowe z r_+^{-1} i r_-^{-1} (łącznie 4 pochodne cząstkowe):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_\pm}\right) = -\frac{1}{r_\pm^3}\left(x \pm \frac{d}{2}\right) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_\pm}\right) = -\frac{1}{r_\pm^3}y$$

Ostatecznie, po podstawieniu do wzoru na ujemny gradient, otrzymujemy wynik identyczny, jak w Zadaniu 2.

(b) Wyrażenia na r_+^{-1} i r_-^{-1} rozwijamy w szereg Taylora względem małego $d/2$ i obcinamy człony rzędu wyższego niż drugi:

$$\frac{1}{r_\pm} \approx \frac{1}{r} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{xd}{r^3}$$

Podstawiamy to wyrażenie do wzoru na potencjał i otrzymujemy wyrażenia:

$$V(r \gg d) = -kq\frac{xd}{r^3} = k\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{r}}{r^3}$$

Pole elektryczne liczymy jako ujemny gradient potencjału. Pamiętamy, że $\mathbf{r} = [x\ y]^T$ i $\mu = [\mu_x\ \mu_x]^T$. Z tego mamy, że $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, także wzór na potencjał (dla $r \gg d$) wygląda tak:

$$V(x, y) = k\frac{\mu_x x + \mu_y y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Liczymy pochodne i otrzymujemy (np. dla $\frac{\partial}{\partial x}V$):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\frac{\mu_x}{r^3} - 3k\frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5}x$$

Mamy ostatecznie:

$$\mathbf{E} = -k\begin{bmatrix} \frac{\mu_x}{r^3} - 3\frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5}x \\ \frac{\mu_y}{r^3} - 3\frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5}y \end{bmatrix} = -k\frac{1}{r^3}\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} + 3k\frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -k\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + 3k\frac{\boldsymbol{\mu}\mathbf{r}}{r^5}\mathbf{r}$$

To się oczywiście zgadza ze wzorem z Zadania 2.

Zadanie 5

(a) Oblicz pracę, jaką trzeba wykonać, aby umieścić ładunek Q w polu dipola określonego momentem dipolowym $\boldsymbol{\mu}$. (b) Oblicz pracę, jaką należy wykonać, aby umieścić taki ładunek na symetralnej dipola. (c) Punkt A jest położony tak, że linia łącząca go i środek dipola tworzy kąt α z osią dipola. Jaką pracę należy wykonać, aby przesunąć ten ładunek z punktu A do punktu A', położonego symetrycznie do A względem symetralnej dipola?

Zadanie 6

Dany jest kwadrat o boku o długości a. W dwóch narożach wzdłuż przekątnej umieszczono ładunki $3q$ i $-q$. W jednym narożu umieszczono dipol (zdefiniowany za pomocą wektora momentu dipolowego $\boldsymbol{\mu}$) pod kątem $90°$ w stosunku do przekątnej przechodzącej przez to naroże i w taki sposób, że koniec wektora momentu dipolowego jest "bliżej" ładunku $-q$. (a) Oblicz natężenie pola w ostatnim narożu (punkt A). (b) Oblicz potencjał elektrostatyczny w ostatnim narożu i wykaż, że ujemny gradient potencjału będzie równy natężeniu pola w tym punkcie. (c) Policz, jaką pracę należy wykonać, aby skonstruować taki układ dwóch ładunków i dipola.

Zadanie 7

Dwie kulki o masie $m = 1$ g zawieszone są na dwóch nitkach o długości $l = 1$ m, zaczepionych w tym samym punkcie na suficie. Jaki (równoimienny) ładunek Q trzeba zgromadzić na każdej z kulek, aby odsunęły się od siebie o odległość $x = 1$ cm

Rozwiązanie:

Kulki się odpychają i wychylają o kąt równy α. Pomiędzy nimi działa siła Coulomba równa

$$F = k\frac{Q^2}{x^2}$$

Poza tym na każdą kulkę działają siły naciągu nici, F_n, i siła grawitacji, $F_\mathrm{g} = mg$. Siły się wektorowo sumują do zera, także mamy dwa równania:

$$F_{\mathrm{n}}\sin\alpha = k\frac{Q^2}{x^2}$$

$$F_{\mathrm{n}}\cos\alpha = mg$$

Z tego mamy kolejno:

$$\frac{F_{\mathrm{n}}\sin\alpha}{F_{\mathrm{n}}\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{kQ^2}{mgx^2} = \frac{x}{\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}x^2}}$$

Ostateczny wynik:

$$Q = \left(\frac{mgx^3}{k\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}x^2}}\right)^{1/2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $Q \approx 1.04 \cdot 10^{-9}$ C $\approx 6.25 \cdot 10^{9}\ e$.

Zadanie 8

Zadany jest prototyp cząsteczki w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości a. W narożach trójkąta umieszczone są ładunki punktowe $+q$, $+2q$ i $-3q$. Oblicz moment dipolowy takiego układu ładunków w dwóch różnych układach współrzędnych: (a) o środku w miejscu ładunku $+2q$ i (b) o środku w punkcie równoodległym od wszystkich ładunków.

Rozwiązanie:

(a) Mamy trzy wektory położenia ładunków:

$$\mathbf{r}_{+q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{+2q} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{-3q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Moment dipolowy obliczamy z definicji i otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{qa}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(a) Wektory położenia ładunków w układzie o środku zaczepionym w środku geometrycznym trójkąta:

$$\mathbf{r}_{+q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a \\ -a\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{+2q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{-3q} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu moment dipolowy wychodzi tyle ile w punkcie (a).

Zadanie 9

Dane są dwa ładunki punktowe $+q$ położone w odległości a względem siebie. Na linii łączącej te ładunki znajdują się dwa dodatkowe ładunki $-q$ w odległości d od ładunków $+q$. (a) Oblicz momenty dipolowy i kwadrupolowy takiego układu ładunków. (b) Oblicz potencjał w dowolnym punkcie w przestrzeni pochodzący od takiego układu ładunków. Oblicz natężenie pola elektrycznego opisanego takim potencjałem.

Zadanie 10

Korzystając z prawa Gaussa (dla elektrostatyki) oblicz pole elektryczne i potencjał w dowolnym miejscu w przestrzeni wytwarzane przez: (a) ładunek punktowy $+q$, (b) równomiernie i ujemnie naładowana kulę o promieniu b, w której wydrążono środek o promieniu a i która jest otoczona równomiernie dodatnio naładowaną (nieskończenie) cienką sferą o promieniu c (ϱ_- i σ_+ to odpowiednio objętościowa i powierzchniowa gęstość ładunku w przypadku wydrążonej kuli i sfery; $a < b < c$), (c) nieskończenie długą nić o liniowej gęstości ładunku równej λ otoczoną przez nieskończenie długą i cienką powłokę walcową o promieniu a i powierzchniowej gęstości ładunku równej σ.

Rozwiązanie:

(a) Ładunek otaczamy sferą S o promieniu r. Dla każdego elementu sfery mamy, że $\mathbf{E} \upuparrows \mathrm{d}\mathbf{S}$, z czego mamy, że $\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E\ \mathrm{d}S$. Z tego oczywiście:

$$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E \oint\limits_S \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ostatecznie mamy, że

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

(b) Całkowity ładunek wydrążonej kuli i cienkiej sfery są odpowiednio równe:

$$Q_- = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\varrho_- \qquad Q_+ = 4\pi c^2 \sigma_+$$

Otaczamy ładunki sferami o różnych promieniach r. Rozpatrujemy kolejne przypadki. Wpierw $r \leq a$:

$$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{I} = 0$$

Następnie kolejno dla $a \leq r \leq b$, $b \leq r < c$ i $r > c$ mamy (dla $r = c$ występuje nieciągłość):

$$\oint\limits_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{4\pi(r^3 - a^3)\varrho_-}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{II} = \frac{\varrho_-(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_-}{\epsilon_0} = \frac{4\pi(b^3 - a^3)\varrho_-}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{III} = \frac{\varrho_-(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_- + Q_+}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\varrho_- + 4\pi c^2\sigma_+\right] \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{IV} = \frac{1}{\epsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3)\varrho_- + c^2\sigma_+\right]$$

Dla każdej odległości potencjał obliczamy z definicji (punkt referencyjny jest w nieskończoności):

$$V(r) = -\int\limits_\infty^r \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int\limits_\infty^r E\ \mathrm{d}r$$

Kolejno dla odpowiednich regionów, licząc od zewnątrz, mamy:

$$V_\mathrm{IV}(r) = -\int\limits_\infty^r \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_\mathrm{III}(r) = -\int\limits_\infty^c \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r - \int\limits_c^r \frac{Q_-}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_-}{r} + \frac{Q_+}{c}\right)$$

$$V_\mathrm{II}(r) = -\int\limits_\infty^c \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r - \int\limits_c^b \frac{Q_-}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r - \int\limits_b^r \frac{\varrho_-(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_-}{r} + \frac{Q_+}{c}\right) - \frac{\varrho_-}{3\epsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2} + a^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$V_{\mathrm{I}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_-}{r} + \frac{Q_+}{c}\right) - \frac{\varrho_-}{3\epsilon_0}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + a^3\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$$

(c) Dla danej długości l mamy, że $Q_1 = \lambda l$ (dla nici) i $Q_2 = 2\pi a l \sigma$ (dla walca). Otaczamy kawałek powierzchnią Gaussa w postaci walca o promieniu r. Całka po powierzchni zamkniętej (S) rozbija się na dwie całki po bocznicy walca (S_1) i po podstawach (S_2). Całki po podstawach znikają, czyli mamy ostatecznie dla regionu $r < a$:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E\int_{S_1} \mathrm{d}S = 2\pi r l E = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{I}} = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$$

Analogiczne otrzymujemy wzór dla regionu $r > a$:

$$E_{\mathrm{II}} = \frac{\lambda + 2\pi a\sigma}{2\pi r\epsilon_0}$$

Aby policzyć potencjał wybieramy punkt inny niż w nieskończoności, np. $R_0 > a$. Wtedy otrzymujemy kolejno:

$$V_{\mathrm{II}} = -\int_{R_0}^{r} E\ \mathrm{d}r = \frac{\lambda + 2\pi a\sigma}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)$$

Analogiczny wzór otrzymujemy dla $r < a$:

$$V_{\mathrm{I}} = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_0}{r}\right) + \frac{a\sigma}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_0}{a}\right)$$

Zadanie 11

Układ ładunków wytwarza pole elektryczne o potencjalne $V(x,y) = y + ax^2$. Oblicz wektor natężenia pola i wykaż, że jest on prostopadły do powierzchni stałego potencjału.

Rozwiązanie:

Powierzchnie stałego potencjały będą miały postać $A = y + ax^2$. Z tego mamy, że wzór na powierzchnie (w dwóch wymiarach) postaci $y = A - ax^2$. Obliczamy pole jako ujemny gradient potencjału:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2ax \\ -1 \end{bmatrix}$$

Wektor infinitezymalnej zmiany wektora położenia na danej powierzchni stałego potencjału (zadanej jakąś konkretną stałą A) ma postać:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ -2ax\ \mathrm{d}x \end{bmatrix}$$

Iloczyn skalarny wektora $\mathbf{E}$ i $\mathrm{d}\mathbf{r}$ wynosi:

$$\mathbf{E}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -2ax & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ -2ax\ \mathrm{d}x \end{bmatrix} = 0$$

Z tego wynika, że wektory $\mathbf{E}$ i $\mathrm{d}\mathbf{r}$ są do siebie prostopadłe. Z tego wynika, że wektor $\mathbf{E}$ jest prostopadły do powierzchni stałego potencjału.

Zadanie 12

Zadane jest jednorodne pole elektryczne (wartość pola w każdym punkcie w przestrzeni wynosi E). W polu tym umieszczono naładowane ładunkiem $+q$ ciało punktowe o masie m i o prędkości początkowej równej v_0 prostopadłej do linii pola. (a) Wyznacz tor ładunku poruszającego się w polu. (b) Jaka praca zostanie wykonana nad ładunkiem przez siłę elektrostatyczną i jaka prędkość końcowa v_k zostanie przez niego uzyskana jeśli ładunek przemieścił się o odległość d wzdłuż linii pola.

Rozwiązanie:

(a) Zakładamy, że początkowe położenie ładunku jest w początku układu współrzędnych, czyli $\mathbf{r}_0 = [0\ 0]^T$. Mamy też, że $\mathbf{v}_0 = [0\ v_0]^T$. Na ładunek działa siła elektryczna równa $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = [qE\ 0]^T$. Zapisujemy równanie ruchu:

$$m \begin{bmatrix} a_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qE \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie a_x to przyśpieszenie układu w kierunku osi X ($a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$). Całujemy równanie z warunkami początkowymi i mamy odpowiednio:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \frac{qE}{m}t \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{qE}{2m}t^2 \\ v_0 t \end{bmatrix}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy tor w postaci funkcji:

$$x(y) = \frac{qE}{2mv_0^2}y^2$$

(b) Pracę, równą oczywiście qEd (siła jest stała), przyrównujemy do zmiany energii kinetycznej:

$$W = qEd = \frac{m}{2}\left(v_\text{k}^2 - v_0^2\right)$$

Z tego mamy, że:

$$v_\text{k} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qE}{m}d}$$

Ten sam wynik otrzymamy korzystając z tego, że ruch jest jednostajny w kierunku osi Y.

Zadanie 13

Zadane jest jednorodne pole elektryczne (wartość pola w każdym punkcie w przestrzeni wynosi E). W polu tym umieszczono podłużny i o zerowym ładunku obiekt (prototyp cząsteczki) o symetrii osiowej pod kątem φ. Obiekt ten ma moment bezwładności równy I. Tensor polaryzowalności dla tego obiektu jest diagonalny względem jego osi symetrii i zadany w sposób następujący: $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$ (w układzie współrzędnych zgodnym z symetrią obiektu). (a) Oblicz moment dipolowy względem osi związanych z tym obiektem. (b) Przedyskutuj ruch obiektu w stałym polu (zapisz równanie ruchu i rozwiąż je zakładając odpowiednie przybliżenia). (c) Oblicz energię potencjalną takiego dipola indukowanego przez jednorodne pole elektryczne.

Rozwiązanie:

(a) Wektor pola $\mathbf{E}$ rozpisany w układzie współrzędnych związanym z cząsteczką (U') ma współrzędne:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E\cos\varphi \\ -E\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

Wtedy odpowiednio wektor indukowanego na tej cząsteczce momentu dipolowego wynosi:

$$\boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}_{U'} \begin{bmatrix} E\cos\varphi \\ -E\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} \alpha_1 E\cos\varphi \\ -\alpha_2 E\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

(b) Na indukowany moment dipolowy działa moment siły równy:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{x'} & \mathbf{e}_{y'} & \mathbf{e}_{z'} \\ \alpha_1 E\cos\varphi & -\alpha_2 E\sin\varphi & 0 \\ E\cos\varphi & -E\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -E^2(\alpha_1 - \alpha_2)\sin\varphi\cos\varphi\ \mathbf{e}_{z'}$$

Zapisujemy następnie równanie ruchu dla bryły sztywnej o momencie bezwładności I:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -E^2(\alpha_1 - \alpha_2)\sin\varphi\cos\varphi$$

Następnie stosując przybliżenie małych kątów mamy, że $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \approx \frac{1}{2}\cdot 2\varphi = \varphi$ i odpowiednio otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego postaci:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{E^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{I}\varphi = 0$$

o częstości drgań równej:

$$\omega = E\sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{I}}$$

(c) Należy policzyć zmianę energii potencjalnej w zależności od zmiany pola elektrycznego:

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{\mu}\ \mathrm{d}\mathbf{E} = -(\alpha_1\cos^2\varphi + \alpha_2\sin^2\varphi)E\ \mathrm{d}E$$

Całkując powyższe wyrażenie otrzymujemy energię potencjalną:

$$E_\mathrm{p} = -\frac{1}{2}(\alpha_1\cos^2\varphi + \alpha_2\sin^2\varphi)E^2$$

Zadanie 14

W jednym rogu kwadratu o boku a umieszczono sferyczny obiekt o współczynniku polaryzowalności równym α. W dwóch bliższych rogach kwadratu umieszczono dipole o momentach dipolowych równych odpowiednio $\boldsymbol{\mu}_1$ i $\boldsymbol{\mu}_2$ w taki sposób, że są one kierowane "od" obiektu sferycznego i wzdłuż boków kwadratu (kierunki dipoli są względem siebie prostopadłe). Oblicz energię potrzebną na skonstruowanie takiego układu.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\mathbf{r}_{\mu_1\mu_2} = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{\mu_1\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{\mu_2\alpha} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na początku umieszczamy dipol $\boldsymbol{\mu}_2$ w polu dipola $\boldsymbol{\mu}_1$, czyli obliczamy energię potencjalną oddziaływania tych dwóch dipoli trwałych:

$$E_\mathrm{p}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) = -\boldsymbol{\mu}_2\ k\left(-\frac{\boldsymbol{\mu}_1}{r^3_{\mu_1\mu_2}} + 3\frac{\boldsymbol{\mu}_1\mathbf{r}_{\mu_1\mu_2}}{r^5_{\mu_1\mu_2}}\mathbf{r}_{\mu_1\mu_2}\right) = k\left(\frac{\boldsymbol{\mu}_1\boldsymbol{\mu}_2}{r^3_{\mu_1\mu_2}} - 3\frac{(\boldsymbol{\mu}_1\mathbf{r}_{\mu_1\mu_2})(\boldsymbol{\mu}_2\mathbf{r}_{\mu_1\mu_2})}{r^5_{\mu_1\mu_2}}\right) = \frac{3k\sqrt{2}}{8a^3}\mu_1\mu_2$$

W powyższych obliczeniach skorzystaliśmy z tego, że iloczyn skalarny momentów dipolowych obu dipoli jest równy zero. Następnie obliczamy energię potrzebną na umieszczenie dipola indukowanego w obiekcie o zadanej polaryzowalności α. Przedstawimy to jako jedno pole $\mathbf{E}_{\mu_1+\mu_2}$ pochodzące od obu dipoli jednocześnie (pole to jest sumą pól od tych dipoli):

$$E_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\mu}_1,\alpha)+E_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{\mu}_2,\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha E^2_{\mu_1+\mu_2}$$

Wpierw obliczamy pole w punkcie dipola indukowanego wytworzone przez dwa dipole trwałe:

$$\mathbf{E}_{\mu_1+\mu_2}=k\left(-\frac{\boldsymbol{\mu}_1}{r^3_{\mu_1\alpha}}+3\frac{\boldsymbol{\mu}_1\mathbf{r}_{\mu_1\alpha}}{r^5_{\mu_1\alpha}}\mathbf{r}_{\mu_1\alpha}\right)+k\left(-\frac{\boldsymbol{\mu}_2}{r^3_{\mu_2\alpha}}+3\frac{\boldsymbol{\mu}_2\mathbf{r}_{\mu_2\alpha}}{r^5_{\mu_2\alpha}}\mathbf{r}_{\mu_2\alpha}\right)=\frac{2k}{a^3}(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{1}+\boldsymbol{\mu}_\mathbf{2})$$

Kwadrat pola obliczamy jako iloczyn skalarny:

$$E^2_{\mu_1+\mu_2}=\mathbf{E}_{\mu_1+\mu_2}\cdot\mathbf{E}_{\mu_1+\mu_2}=\frac{4k^2}{a^6}(\mu_1^2+\mu_2^2)$$

Ostatecznie energia potencjalna oddziaływania jest równa:

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{3k\sqrt{2}}{8a^3}\mu_1\mu_2-\frac{2k^2}{a^6}\alpha(\mu_1^2+\mu_2^2)$$

Zadanie 15

(a) Zadana jest nieskończona warstwa ładunku o grubości d i objętościowej gęstości ładunku równej wszędzie ϱ (w całym zdaniu jako Q oznaczymy całkowity ładunek przypadający na jednostkę objętości V). Znajdź pole elektryczne i potencjał w dowolnym miejscu w przestrzeni. (b) Załóż, że taka sama nieskończona warstwa o grubości d wykonana jest z przewodnika (np. metalu) i została początkowo naładowana (na jednostkę objętości V) ładunkiem Q. Znajdź pole elektryczne i potencjał w dowolnym miejscu w przestrzeni. (c) Zadane są dwie nieskończone metalowe płyty o grubości d umieszczone w odległości L. Jedną z nich naładowano ładunkiem (na jednostkę objętości V) równym Q, a drugą $2Q$. Znajdź pole elektryczne i potencjał w dowolnym miejscu w przestrzeni.

Zadanie 16

(a) Dany jest kondensator płaski (dwie płyty o gęstości powierzchniowej ładunku ϱ_+ i ϱ_- odległe o d i powierzchni S). Znajdź pole elektryczne i potencjał wewnątrz okładek kondensatora, pojemność kondensatora i energię jaką można zmagazynować w takim kondensatorze. (b) W kondensator z punktu (a) włożono dielektryk o przenikalności elektrycznej ϵ. Oblicz wszystkie parametry kondensatora. (c) Rozważ sytuację jak z punktu (b), ale dielektryk wypełnia okładki kondensatora tylko w połowie i styka się z dodatnio naładowaną okładką. (d) Zadany jest kondensator cylindryczny o długości L, promieniu wewnętrznej okładki równym a, promieniu zewnętrznej okładki równej b i wypełniony w pełni dielektrykiem o przenikalności elektrycznej ϵ. Znajdź pole elektryczne i potencjał wewnątrz okładek kondensatora, pojemność kondensatora i energię jaką można zmagazynować w takim kondensatorze.

Zadanie 17

Dany jest kondensator płaski (dwie płyty o powierzchni S odległe o d). Kondensator podłączony jest to stałego źródła napięcia równego U. W całą objętość kondensatora wsunięto dielektryk o przenikalności elektrycznej ϵ. Jak zmieni się ładunek na okładkach kondensatora, jego pojemność i energia jaką można w nim zgromadzić.

Zadanie 18

Zadany jest obwód elektryczny prądu stałego zgodny z rysunkiem (rysunek obwodu będzie podany na ćwiczeniach). (a) Znaleźć różnicę potencjałów (napięcie) pomiędzy punktami A i B. (b) Znaleźć ładunek zgromadzony na kondensatorze. (c) Znaleźć moc jaka wydzieli się na oporze $\underline{R}$.

Zadanie 19

Obwód prądu stałego zasilany jest ze źródła o napięciu U_0. Rozważ następujące punkty: (a) oblicz pojemność zastępczą i energię układu dwóch połączonych szeregowo kondensatorów o pojemności C; (b) tak samo jak w punkcie (a), ale w jeden z kondensatorów włożono dielektryk o stałej dielektrycznej ϵ; (c) tak samo jak w punkcie (b), ale kondensatory są połączone równolegle. (d) Dane jak w puncie (c). Jak zmieni się ładunek na każdym kondensatorze i energia układu jeśli wyjmiemy dielektryk i nie odłączymy źródła napięcia. (e) Dane jak jak w puncie (d) ale wpierw odłączamy źródło napięcia a potem wyjmujemy dielektryk.

Zadanie 20

(a) Obliczyć wektor indukcji pola magnetycznego w środku pętli o promieniu R, przez którą płynie prąd o natężeniu I. Oblicz moment magnetyczny takiej pętli. (b) Dany jest przewodnik w prądem jak na załączonym obrazku (rysunek przewodnika będzie podany na ćwiczeniach). Oblicz wektor indukcji pola magnetycznego w punkcie A.

Zadanie 21

(a) Zadany jest nieskończony przewód koncentryczny, w którym wewnątrz płynie prąd o natężeniu I w "płaszczu" o promieniach wewnętrznym i zewnętrznym równych a i b, natomiast prąd przeciwny płynie w nieskończenie cienkiej warstwie o promieniu c ($a < b < c$). Znaleźć wartość wektora indukcji magnetycznej w dowolnej odległości od środka przewodu korzystając z prawa Ampere'a. (b) Zadany jest nieskończony przewód przez który płynie prąd I. Oblicz wartość wektora indukcji magnetycznej korzystając z prawa Amprere'a.

Zadanie 22

Zadana jest nieskończona płyta o grubości d i naładowana równomiernie ładunkiem o gęstości objętościowej ϱ. Płyta porusza się ze stałą prędkością v. Oblicz wektor indukcji magnetycznej w dowolnej odległości od płyty.

Zadanie 23

Dane jest jednorodne pole magnetyczne zgodne (w pewnym kartezjańskim układzie współrzędnych) z osią X. Wzdłuż osi Y znajduje się oś sztywnej ramki (o bokach a i b) z prądem (oś przechodzi tylko przez środki dwóch przeciwległych boków o długości bb), przez którą płynie prąd I. Przedyskutuj ruch ramki w polu magnetycznym.