

Treści zadań ze *szkicami* rozwiązań na Ćwiczenia z Fizyki 0+A dla I roku Chemii UW. Części na **czerwono** są dodatkowe i nie zawsze są robione na ćwiczeniach i nie zawsze są od razu do nich podane szkice rozwiązań.

Zadanie 1

W trzech narożach kwadratu o boku a umieszczono kolejno ładunki: $-3q$, $+q$ i $+2q$ (ładunek $+q$ znajduje się po przekątnej od naroża kwadratu, w którym nie ma żadnego ładunku). Oblicz wektor natężenia pola w ostatnim narożu.

Rozwiązanie:

Położenia ładunków w zadanym kartezjańskim układzie współrzędnych mogą wyglądać tak:

$$\mathbf{r}_{+2q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{-3q} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{+q} = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$$

Całkowite pole jest sumą odpowiednich pól cząstkowych:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+2q} + \mathbf{E}_{-3q} + \mathbf{E}_{+q} = k \frac{2q}{r_{+2q}^3} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} + k \frac{-3q}{r_{-3q}^3} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + k \frac{q}{r_{+q}^3} \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \frac{kq}{a^2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} - 3 \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\right) \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

(a) Oblicz natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie w przestrzeni pochodzące od dwóch różnoimiennych ładunków o wartości q znajdujących się w odległości d od siebie. (b) Rozważ szczególne przypadki, tj. gdy punkt znajduje się na przedłużeniu osi łączącej oba ładunki, oraz gdy znajduje się w równej odległości od obu ładunków (na symetralnej odcinka d). (c) Rozważ przypadek, gdy odległość punktu od środka linii łączącej ładunki jest znacznie większa niż d . (d) Tam, gdzie to będzie możliwe, zapisz odpowiednie wyrażenia korzystając z definicji wektora momentu dipolowego.

Rozwiązanie:

(a) Układ współrzędnych umieszczamy w środku pomiędzy dwoma ładunkami (oś X jest skierowana wzdłuż linii łączącej ładunki). Położenia ładunków:

$$\mathbf{d}_{\pm} = \begin{bmatrix} \mp \frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla danego wektora $\mathbf{r} = [x \ y]^T$ mamy:

$$\mathbf{d}_{\pm} + \mathbf{r}_{\pm} = \mathbf{r}$$

z tego mamy, że

$$\mathbf{r}_{\pm} = \mathbf{r} - \mathbf{d}_{\pm} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mp \frac{d}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \pm \frac{d}{2} \\ y \end{bmatrix}$$

Całkowite pole od obu ładunków jest zatem równe:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{+} + \mathbf{E}_{-} = k \frac{q}{r_{+}^3} \mathbf{r}_{+} + k \frac{-q}{r_{-}^3} \mathbf{r}_{-} = kq \left(\frac{1}{r_{+}^3} \begin{bmatrix} x + \frac{d}{2} \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{r_{-}^3} \begin{bmatrix} x - \frac{d}{2} \\ y \end{bmatrix} \right)$$

gdzie

$$r_{\pm} = \sqrt{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$$

(b) Przypadki szczególne ($y = 0$ i $x = 0$):

$$\mathbf{E}(y = 0) = kq \left(\frac{1}{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(x = 0) = kq \frac{d}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Rozwijamy wyrażenia r_+^{-3} i r_-^{-3} w szereg Taylora względem małego $d/2$ i obcinamy człony rzędu wyższego niż drugi:

$$\frac{1}{r_{\pm}^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3} - \frac{3}{2} \left(\pm \frac{d}{2}\right) \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^5} + \dots \approx \frac{1}{r^3} \mp \frac{3}{2} \cdot \frac{xd}{r^5}$$

i wstawiamy to do wzoru na pole w dowolnym punkcie:

$$\mathbf{E}(r \gg d) = kq \left(\frac{d}{r^3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \frac{xd}{r^5} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

(d) Wstawiamy do wyrażen moment dipolowy dla tego konkretnego przypadku, $\boldsymbol{\mu} = -qd [1 \ 0]^T$, i otrzymujemy kolejno:

$$\mathbf{E}(x = 0) = -k \frac{\boldsymbol{\mu}}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathbf{E}(r \gg d) = -k \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + 3k \frac{\boldsymbol{\mu} \mathbf{r}}{r^5}$$

Zadanie 3 - kontynuacja Zadania 1

W trzech narożach kwadratu o boku a umieszczono kolejno ładunki: $-3q$, $+q$ i $+2q$ (ładunek $+q$ znajduje się po przekątnej od naroża kwadratu gdzie nie ma żadnego ładunku, punkt A). (a) Oblicz potencjał elektrostatyczny w ostatnim narożu (w punkcie A). (b) Oblicz pracę potrzebną na skonstruowanie takiego układu ładunków. (c) Oblicz ujemny gradient potencjału w ostatnim narożu kwadratu, A .

Rozwiązanie:

(a) Analogicznie, jak w Zadaniu 1. Potrzebne są tylko długości wektorów i obliczamy potencjał:

$$V = \frac{kq}{a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

(b) Obliczamy kolejno prace potrzebne do umieszczenia ładunku $+2q$ w polu $+q$, a potem ładunku $-3q$ w polu dwóch pierwszych:

$$W = 2 \frac{kq^2}{a} - 3 \frac{kq^2}{a} \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = -\frac{kq^2}{a} \left(\frac{6\sqrt{2}}{2} + 1 \right)$$

(c) Definicje są takie same, jak w Zadaniu 1, czyli chcemy obliczyć pole w środku układu współrzędnych. Aby obliczyć pochodne funkcji w danym punkcie, musimy znać jej zachowanie w pobliżu tego punktu. Wprowadzamy wektor $\mathbf{r} = [x \ y]^T$. Wtedy kolejno mamy wektory:

$$\mathbf{r}'_{+2q} = \begin{bmatrix} x \\ y - a \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}'_{-3q} = \begin{bmatrix} x + a \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}'_{+q} = \begin{bmatrix} x + a \\ y - a \end{bmatrix}$$

Obliczamy potencjał w tym punkcie:

$$V(x, y) = kq \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2}} \right)$$

i dalej obliczamy pole, jako ujemny gradient:

$$\mathbf{E}(x, y) = -\nabla V(x, y) = -kq \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + (y - a)^2})^3} - \frac{3(x + a)}{(\sqrt{(x + a)^2 + y^2})^3} + \frac{x + a}{(\sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2})^3} \\ \frac{2(y - a)}{(\sqrt{x^2 + (y - a)^2})^3} - \frac{3y}{(\sqrt{(x + a)^2 + y^2})^3} + \frac{y - a}{(\sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2})^3} \end{array} \right]$$

Jeśli w tym wyrażeniu podstawimy $x = 0$ i $y = 0$, to otrzymujemy wynik identyczny, jak w Zadaniu 1.

Zadanie 4 - kontynuacja Zadania 2

(a) Oblicz potencjał elektrostatyczny w dowolnym punkcie w przestrzeni pochodzący od dwóch różnoimiennych ładunków o wartości q znajdujących się w odległości d . **Oblicz jego ujemny gradient.**

(b) Rozważ przypadek, gdy odległość punktu od środka linii łączącej ładunki jest znacznie większa niż d (przybliżenie multipolowe). Przedstaw wynik korzystając z definicji momentu dipolowego. **Oblicz natężenie pola pochodzące od takiego potencjału.**

Rozwiązanie:

(a) Robimy analogicznie, jak w Zadaniu 2. Potrzebne są tylko długości wektorów i mamy obliczony potencjał:

$$V = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

Aby obliczyć pole, w pierw obliczamy pochodne cząstkowe z r_+^{-1} i r_-^{-1} (łącznie 4 pochodne cząstkowe):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{\pm}} \right) = -\frac{1}{r_{\pm}^3} \left(x \pm \frac{d}{2} \right) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{\pm}} \right) = -\frac{1}{r_{\pm}^3} y$$

Ostatecznie, po podstawieniu do wzoru na ujemny gradient, otrzymujemy wynik identyczny, jak w Zadaniu 2.

(b) Wyrażenia na r_+^{-1} i r_-^{-1} rozwijamy w szereg Taylora względem małego $d/2$ i obcinamy człony rzędu wyższego niż drugi:

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{xd}{r^3}$$

Podstawiamy to wyrażenie do wzoru na potencjał i otrzymujemy wyrażenia:

$$V(r \gg d) = -kq \frac{xd}{r^3} = k \frac{\boldsymbol{\mu} \mathbf{r}}{r^3}$$

Pole elektryczne liczymy jako ujemny gradient potencjału. Pamiętajmy, że $\mathbf{r} = [x \ y]^T$ i $\boldsymbol{\mu} = [\mu_x \ \mu_x]^T$. Z tego mamy, że $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, także wzór na potencjał (dla $r \gg d$) wygląda tak:

$$V(x, y) = k \frac{\mu_x x + \mu_y y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Liczmy pochodne i otrzymujemy (np. dla $\frac{\partial}{\partial x} V$):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k \frac{\mu_x}{r^3} - 3k \frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5} x$$

Mamy ostatecznie:

$$\mathbf{E} = -k \begin{bmatrix} \frac{\mu_x}{r^3} - 3 \frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5} x \\ \frac{\mu_y}{r^3} - 3 \frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5} y \end{bmatrix} = -k \frac{1}{r^3} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} + 3k \frac{\mu_x x + \mu_y y}{r^5} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -k \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + 3k \frac{\boldsymbol{\mu} \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}$$

To się oczywiście zgadza ze wzorem z Zadania 2.

Zadanie 5

(a) Oblicz pracę, jaką trzeba wykonać, aby umieścić ładunek Q w polu dipola określonego momentem dipolowym $\boldsymbol{\mu}$. (b) Oblicz pracę, jaką należy wykonać, aby umieścić taki ładunek na symetralnej dipola. (c) Punkt A jest położony tak, że linia łącząca go i środek dipola tworzy kąt α z osią dipola. Jaką pracę należy wykonać, aby przesunąć ten ładunek z punktu A do punktu A' , położonego symetrycznie do A względem symetralnej dipola?

Zadanie 6

Dany jest kwadrat o boku o długości a . W dwóch narożach wzdłuż przekątnej umieszczono ładunki $3q$ i $-q$. W jednym narożu umieszczono dipol (zdefiniowany za pomocą wektora momentu dipolowego $\boldsymbol{\mu}$) pod kątem 90° w stosunku do przekątnej przechodzącej przez to naroże i w taki sposób, że koniec wektora momentu dipolowego jest "bliżej" ładunku $-q$. (a) Oblicz natężenie pola w ostatnim narożu (punkt A). (b) Oblicz potencjał elektrostatyczny w ostatnim narożu i wykaż, że ujemny gradient potencjału będzie równy natężeniu pola w tym punkcie. (c) Policz, jaką pracę należy wykonać, aby skonstruować taki układ dwóch ładunków i dipola.

Zadanie 7

Dwie kulki o masie $m = 1$ g zawieszono na dwóch nitkach o długości $l = 1$ m, zaczepionych w tym samym punkcie na suficie. Jaki (równomierny) ładunek Q trzeba zgromadzić na każdej z kulek, aby odsunęły się od siebie o odległość $x = 1$ cm

Rozwiązanie:

Kulki się odpychają i wychylają o kąt równy α . Pomiędzy nimi działa siła Coulomba równa

$$F = k \frac{Q^2}{x^2}$$

Poza tym na każdą kulkę działają siły naciągu nici, F_n , i siła grawitacji, $F_g = mg$. Siły się wektorowo sumują do zera, także mamy dwa równania:

$$F_n \sin \alpha = k \frac{Q^2}{x^2}$$

$$F_n \cos \alpha = mg$$

Z tego mamy kolejno:

$$\frac{F_n \sin \alpha}{F_n \cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{kQ^2}{mgx^2} = \frac{x}{\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}x^2}}$$

Ostateczny wynik:

$$Q = \left(\frac{mgx^3}{k\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}x^2}} \right)^{1/2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $Q \approx 1.04 \cdot 10^{-9} \text{ C} \approx 6.25 \cdot 10^9 e$.

Zadanie 8

Zadany jest prototyp cząsteczki w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości a . W narożach trójkąta umieszczone są ładunki punktowe $+q$, $+2q$ i $-3q$. Oblicz moment dipolowy takiego układu ładunków w dwóch różnych układach współrzędnych: (a) o środku w miejscu ładunku $+2q$ i (b) o środku w punkcie równoodległym od wszystkich ładunków.

Rozwiązanie:

(a) Mamy trzy wektory położenia ładunków:

$$\mathbf{r}_{+q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{+2q} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{-3q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Moment dipolowy obliczamy z definicji i otrzymujemy:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{qa}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -3\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(a) Wektory położenia ładunków w układzie o środku zaczepionym w środku geometrycznym trójkąta:

$$\mathbf{r}_{+q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a \\ -a\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{+2q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ -a\frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{-3q} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu moment dipolowy wychodzi tyle ile w punkcie (a).

Zadanie 9

Dane są dwa ładunki punktowe $+q$ położone w odległości a względem siebie. Na linii łączącej te ładunki znajdują się dwa dodatkowe ładunki $-q$ w odległości d od ładunków $+q$. (a) Oblicz momenty dipolowy i kwadrupolowy takiego układu ładunków. (b) Oblicz potencjał w dowolnym punkcie w przestrzeni pochodzący od takiego układu ładunków. Oblicz natężenie pola elektrycznego opisanego takim potencjałem.

Zadanie 10

Korzystając z prawa Gaussa (dla elektrostatyki) oblicz pole elektryczne i potencjał w dowolnym miejscu w przestrzeni wytwarzane przez: (a) ładunek punktowy $+q$, (b) równomiernie i ujemnie naładowaną kulę o promieniu b , w której wydrążono srodek o promieniu a i która jest otoczona równomiernie dodatnio naładowaną (nieskończenie) cienką sferą o promieniu c (ρ_- i σ_+ to odpowiednio objętościowa i powierzchniowa gęstość ładunku w przypadku wydrążonej kuli i sfery; $a < b < c$), (c) nieskończenie długą nić o liniowej gęstości ładunku równej λ otoczoną przez nieskończenie długą i cienką powłokę walcową o promieniu a i powierzchniowej gęstości ładunku równej σ .

Rozwiązanie:

(a) Ładunek otaczamy sferą S o promieniu r . Dla każdego elementu sfery mamy, że $\mathbf{E} \uparrow \uparrow d\mathbf{S}$, z czego mamy, że $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$. Z tego oczywiście:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ostatecznie mamy, że

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

(b) Całkowity ładunek wydrążonej kuli i cienkiej sfery są odpowiednio równe:

$$Q_- = \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho_- \quad Q_+ = 4\pi c^2\sigma_+$$

Otoczamy ładunki sferami o różnych promieniach r . Rozpatrujemy kolejne przypadki. Wpierw $r \leq a$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_I = 0$$

Następnie kolejno dla $a \leq r \leq b$, $b \leq r < c$ i $r > c$ mamy (dla $r = c$ występuje nieciągłość):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{4\pi(r^3 - a^3)\rho_-}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{II} = \frac{\rho_-(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_-}{\epsilon_0} = \frac{4\pi(b^3 - a^3)\rho_-}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{III} = \frac{\rho_-(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_- + Q_+}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)\rho_- + 4\pi c^2\sigma_+ \right] \quad \Rightarrow \quad E_{IV} = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{1}{3}(b^3 - a^3)\rho_- + c^2\sigma_+ \right]$$

Dla każdej odległości potencjał obliczamy z definicji (punkt referencyjny jest w nieskończoności):

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r E dr$$

Kolejno dla odpowiednich regionów, licząc od zewnątrz, mamy:

$$V_{IV}(r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_{III}(r) = - \int_{\infty}^c \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_c^r \frac{Q_-}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_-}{r} + \frac{Q_+}{c} \right)$$

$$V_{II}(r) = - \int_{\infty}^c \frac{Q_- + Q_+}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_c^b \frac{Q_-}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_b^r \frac{\rho_-(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_-}{r} + \frac{Q_+}{c} \right) - \frac{\rho_-}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{b^2}{2} + a^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

$$V_I(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_-}{r} + \frac{Q_+}{c} \right) - \frac{\rho_-}{3\epsilon_0} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + a^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

(c) Dla danej długości l mamy, że $Q_1 = \lambda l$ (dla nici) i $Q_2 = 2\pi a l \sigma$ (dla walca). Otaczamy kawałek powierzchnią Gaussa w postaci walca o promieniu r . Całka po powierzchni zamkniętej (S) rozбивa się na dwie całki po bocznicę walca (S_1) i po podstawach (S_2). Całki po podstawach znikają, czyli mamy ostatecznie dla regionu $r < a$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \int_{S_1} dS = 2\pi r l E = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_I = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Analogicznie otrzymujemy wzór dla regionu $r > a$:

$$E_{II} = \frac{\lambda + 2\pi a\sigma}{2\pi r\epsilon_0}$$

Zadanie 11

Układ ładunków wytwarza pole elektryczne o potencjalne $V(x, y) = y + ax^2$. Oblicz wektor natężenia pola i wykaż, że jest on prostopadły do powierzchni stałego potencjału.

Zadanie 12

Zadane jest jednorodne pole elektryczne. W polu tym umieszczono naładowane ładunkiem $+q$ ciało punktowe o masie m i o prędkości początkowej równej v_0 prostopadłej do linii pola. (a) Wyznacz tor ładunku poruszającego się w polu. (b) Jaka praca zostanie wykonana nad ładunkiem przez siłę elektrostatyczną i jaka prędkość końcowa v_k zostanie przez niego uzyskana jeśli ładunek przemieścił się o odległość d wzdłuż linii pola.